کاربرد میدان الکترومغناطیسی محاسباتی در طراحی منبع جریان خط هوایی

علی ملکی[۱] ، علیرضا محمودی‌فرد[۲]*

[۱] دانشجوی کارشناسی‌ارشد ناپیوسته مهندسی مخابرات دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، A.malekibme@gmail.com
[۲] کارشناسی‌ارشد ناپیوسته مدیریت صنعتی دانشگاه شاهد (و فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق و مدرس دانشگاه‌ها)، alireza10.m10@gmail.com

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۱۲
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۲۵
تاریخ انتشار مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۳۰

کلمات کلیدی:
منبع جریان خط
مشکل نیم فضا
انتشار موج EM
طراحی سیستم الکترومغناطیسی
خط هوایی
میدان لکترومغناطیسی

چکیده

امروزه روش‌های الکترومغناطیسی محاسباتی[۱] نقش مهمی در مدل‌سازی و طراحی سریع سیستم‌های الکترومغناطیسی[۲]و کاربردهای تجاری و صنعتی آن‌ها ایفا می‌کنند؛ نمونه‌سازی مجازی مبتنی بر الکترومغناطیسی محاسباتی در حال حاضر به‌دلیل دقت بالا به‌طور گسترده در طراحی سیستم‌های الکتریکی و الکترونیکی، مورد استفاده قرار گرفته است؛ با بسیاری از روش-های عددی برای حل معادلات ماکسول در محدوده وسیعی از فرکانس از DC تا صدها گیگاهرتز یا حتی در محدوده امواج تراهرتز تضمین شده است؛ با افزایش مداوم یکپارچگی و پیچیدگی در سیستم‌ها و دستگاه‌های EM، مدل‌سازی عددی و روش‌های شبیه‌سازی نقش کلیدی در طراحی منبع‌های جریان الکترومغناطیس هوایی دارند.

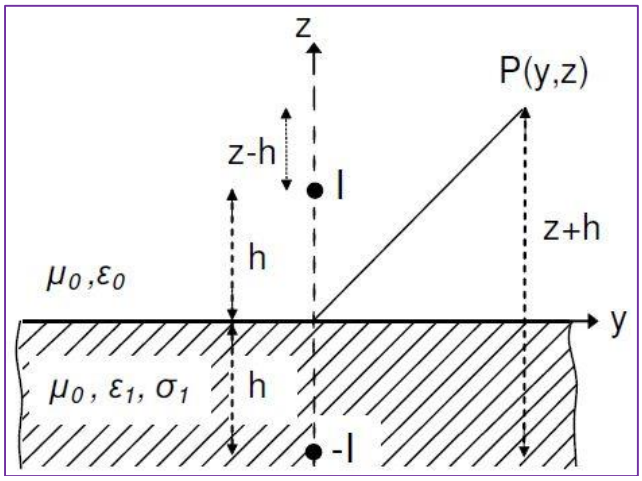
این مقاله، یک راه‌حل تحلیلی‌شکل سری برای اجزای میدان الکترومغناطیسی هم‌زمان تولید شده توسط یک منبع خط جریان سربار ارائه می‌کند؛ راه‌حل از ریخته‌گری عبارت انتگرال نمایش کامل برای میدان الکتریکی محوری تولید شده به شکلی ناشی می‌شود که در آن بخش غیر تحلیلی انتگرال به یک سری توان از ضریب انتشار عمودی در فضای هوا گسترش می‌یابد؛ این امکان، بیان میدان الکتریکی را به‌عنوان مجموع مشتقات انتگرال سامرفلد توصیف می‌کند که میدان اولیه را که شکل صریح آن مشخص است، بیان می‌کند؛ در نتیجه، میدان الکتریکی به-عنوان مجموع توابع هانکل استوانه‌ای، با ضرایب بسته به موقعیت نقطه میدان نسبت به منبع خط و تصویر ایده‌آل آن، داده می‌شود؛ عبارات صریح مشابه برای اجزای میدان مغناطیسی، با اعمال قانون فارادی به‌دست می‌آیند؛ نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهند که راه‌حل تحلیلی مشتق‌شده، مزایایی از نظر هزینه زمانی با توجه به طرح‌های عددی مرسوم مورد استفاده برای محاسبه انتگرال‌های نوع Sommerfeld ارائه می‌دهد.

۱ – مقدمه

• محاسبه میدان‌های الکترومغناطیسی از خطوط الکتریکی بالای سر واقع در بالای نواحی زمینی پراکنده، یک مشکل کلاسیک است که امروزه به‌دلیل نگرانی عمومی در مورد اثرات بیولوژیکی قرار گرفتن در معرض میدان، هنوز مورد توجه است؛ در واقع، به‌خوبی شناخته شده است که میدان‌های EM قوی مرتبط با جریان‌ها و ولتاژهای با شدت بالا خطوط برق می‌توانند اثرات نامطلوبی بر انسان‌ها، حیوانات و سایر اشکال حیات ایجاد کنند [۱-۳]؛ این مشکل، در تمام انواع آن، از زمانی‌که یک راه‌حل برای اولین بار در آغاز قرن بیستم توسط کارسون [۱-۲۵] ارائه شد، کمک‌های زیادی به ادبیات علمی کرده است؛ با این حال، علی‌رغم تنوع رویکردهای پیشنهادی، بر اساس دانش نویسنده، تکنیک‌های صرفا تحلیلی در ادبیات کمیاب است و اکثر روش‌های منتشر شده سعی در حل این مشکل از طریق اشتقاق فرمول‌های تحلیلی قابل قبول برای درمان عددی دارند؛ نمونه‌های عالی این رویکردها، روش شناخته شده گشتاورها (MoM) است که برای حل فرمول‌های انتگرال سطحی استفاده می‌شود و روش منابع کمکی [۱۰ و ۳۰]، که شامل بیان میدان‌ها به‌صورت برهم‌نهی وزنی مشارکت‌های متناهی است؛ تعداد جریان‌های ساختگی که بر روی سطوح ریاضی جدا شده از سطح مشترک هوا و زمین جریان دارند؛ حتی اگر این روش‌ها از نظر دقت و کارایی، عملکرد خوبی از خود نشان دهند، به‌عنوان رویه‌های عددی، از ضرر ذاتی درگیر شدن نیازمندی‌های حافظه و هزینه‌های محاسباتی به‌طور قابل‌توجهی بیشتر از آنچه در یک راه‌حل تحلیلی ذکر شده، رنج می‌برند؛ علاوه بر این، آن‌ها بینش کمتری در فیزیک مسئله ارائه می‌دهند و همچنین برای تجزیه و تحلیل حساسیت کمتر مناسب هستند؛ از سوی دیگر، یکی از مشارکت‌های مهم در زمینه تکنیک‌های تحلیلی صرف، کار پروفسور J. R. Wait [۵ و ۳۰] است که عبارات میدانی حاصل از استفاده از تئوری تصویر پیچیده را ارائه می‌دهد؛ تنها اشکال فرمول‌های به‌دست آمده در این است که آن‌ها فقط در رژیم شبه استاتیک معتبر هستند، یعنی زمانی‌که اثرات جریان‌های جابجایی در فضای هوا ناچیز است. هدف مقاله حاضر، استخراج عبارات سری شکل دقیق برای اجزای میدان EM هماهنگ با زمان است که در هوا-فضا توسط یک منبع خط جریان یکنواخت واقع در بالای یک زمین اتلاف‌کننده همگن تولید می‌شود؛ عبارات میدان با شروع تجزیه نمایش یکپارچه برای مولفه محوری میدان الکتریکی تولید شده به سه قسمت به‌دست می‌آیند؛ یعنی میدان مستقیم القا شده توسط جریان منبع، میدان بازتابی ایده‌آل ناشی از جریان تصویر منفی و یک اصطلاح اصلاحی ناشی از آن. به رسانایی ناقص زمین در مرحله بعد؛ پس از تشخیص اینکه دو عبارت اول را می‌توان به‌طور مستقیم به شکل صریح بیان کرد، بخش غیر تحلیلی انتگرال عبارت تصحیح به یک سری توانی از ضریب انتشار عمودی در فضای هوا بسط می‌یابد؛ این مورد اجازه می‌دهد تا میدان الکتریکی را به‌عنوان مجموع مشتقات انتگرال سامرفلد بیان کنیم که میدان مستقیم را توصیف می‌کند؛ در نتیجه، میدان به‌عنوان مجموع توابع هانکل استوانه‌ای، با ضرایب بسته به موقعیت نقطه میدان نسبت به منبع جریان اصلی و تصویر ایده‌آل آن، داده می‌شود؛ در نهایت، عبارات صریح مشابهی برای اجزای میدان مغناطیسی با اعمال قانون فارادی به‌دست می‌آیند؛ راه‌حل به‌دست‌آمده، مشمول فرضیات ساده‌سازی نمی‌شود و از این-رو، حتی زمانی‌که اثرات فرکانس بالا ناشی از جریان‌های جابجایی در هوا و خاک ناچیز نباشد، معتبر است؛ در نتیجه، راه‌حل همچنین به‌عنوان یک معیار تحلیلی برای ابزارهای شبیه‌سازی که برای حل مسائل ارزش مرزی EM استفاده می‌شود، کاربرد عملی دارد؛ آزمون‌های عددی برای نشان دادن اعتبار روش توسعه‌یافته و مزایای آن از نظر زمان محاسبه با توجه به الگوریتم‌های عددی استاندارد مورد استفاده برای ارزیابی انتگرال‌های نوع سامرفیلد انجام می‌شود [۳۰].

۲ – فرمول‌بندی مساله

• همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، یک منبع خط بی‌نهایت جریان را در نظر بگیرید که در مجاورت یک زمین همگن صاف قرار دارد.



شکل ۱- طرحی از یک منبع خط جریان در بالای یک زمین همگن [۳۰]

این خط در بالای سطح زمین در ارتفاع h قرار دارد و محیط مادی با گذردهی دی‌الکتریک ε_1 و رسانایی الکتریکی σ_1 مشخص می-

شود، در حالی‌که نفوذپذیری مغناطیسی در همه جا به اندازه فضای آزاد μ_0 در نظر گرفته می‌شود؛ بر اساس این فرضیه که نقطه مشاهده در ناحیه میدان نزدیک منبع خط قرار دارد، منطقی است که فرض کنیم خط یک جریان تقریبا یکنواخت [۱ و ۱۰] را پشتیبانی می‌کند، یعنی $I(x,t) \cong Ie^{j\omega t}$. با توجه به تقارن مساله، کل میدان الکتریکی تولید شده در فضای هوا تنها دارای یک جزء در جهت محوری است که نمایش انتگرالی آن به‌خوبی شناخته شده و توسط رابطه ۱ ارائه شده است [۳۰]:

$$E_x = -\frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi}[S_d(|z-h|)+S_r(z+h)] \qquad (۱)$$

$$S_d(\zeta)=\int_0^{\infty}\frac{1}{u_0}e^{-u_0\zeta}\cos(\lambda y)d\lambda = -\frac{j\pi}{2}H_0^{(2)}(k_0\sqrt{y^2+\zeta^2}) \qquad (۲)$$

همچنین داریم:

$$S_r(\zeta)=\int_0^{\infty}\frac{1}{u_0}\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{-u_0\zeta}\cos(\lambda y)d\lambda \qquad (۳)$$

انتگرال‌های روابط بالا، به‌ترتیب انتگرال‌های سامرفلد هستند که میدان‌های مستقیم و بازتاب‌شده را توصیف می‌کنند، $H_0^{(2)}$ تابع Hankel مرتبه صفر از نوع دوم، و $u_n=\sqrt{\lambda^2-k_n^2}$ هستند. هدف این پژوهش، استخراج نمایش دقیق سری برای E_x و مولفه‌های میدان مغناطیسی است که دومی از اعمال قانون فارادی ناشی می‌شود؛ برای این هدف، ابتدا استفاده از هویت راحت است:

$$\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}=-1+\frac{2u_0}{u_0+u_1} \qquad (۴)$$

که S_r را به دو قسمت تقسیم می‌کند و سهم میدان بازتابی ایده‌آل (القا شده توسط جریان تصویر منفی) به اضافه یک جمله به‌دلیل رسانایی ناقص زمین است؛ در این حالت داریم [۲]:

$$S_r(z+h)=-S_d(z+h)+S_c(z+h) \qquad (۵)$$

و در آن:

$$S_c(\zeta)=2\int_0^{\infty}\frac{e^{-u_0\zeta}}{u_0+u_1}\cos(\lambda y)d\lambda \qquad (۶)$$

انتگرال S_c را می‌توان با انجام مراحل زیر ارزیابی کرد؛ پس از تنظیم $\alpha=\sqrt{k_1^2/k_0^2-1}$ و:

$$\frac{1}{u_0+u_1}=\frac{u_0}{k_0^2\alpha^2}+jP(u_0) \qquad (۷)$$

ما کمیت $e^{u_0\beta}P(u_0)$ را جایگزین می‌کنیم، جایی‌که β یک ثابت واقعی غیرمنفی است که باید تعیین شود، با بسط تیلور آن در حدود $u_0=0$ به روشی مشابه، نتیجه می‌دهد [۳۰]:

$$f(u_0)=e^{u_0\beta}P(u_0)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}u_0^i \qquad (۸)$$

و در نتیجه رابطه (۶) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$S_c(\zeta)=\frac{2}{(k_0\alpha)^2}\int_0^{\infty}u_0e^{-u_0\zeta}\cos(\lambda y)d\lambda+2j\sum_{i=0}^{\infty}a_i(\beta)\int_0^{\infty}u_0^ie^{-u_0(\zeta+\beta)}\cos(\lambda y)d\lambda \qquad (۹)$$

برقرار بودن رابطه بالا رابطه $a_i(\beta)=f^{(i)}(0)/i!$ را تایید می‌کند؛ با این فرض که $z>0$، انتگرال دوم در سمت راست رابطه (۹) بدون توجه به مقدار انتخاب شده برای ثابت دلخواه غیر منفی b همگرا می‌شود [۵].

این به این دلیل اتفاق می‌افتد که وقتی λ به اندازه کافی بزرگ می‌شود، ضریب نمایی $e^{-u_0(\zeta+\beta)}$ به $e^{-\lambda(\zeta+\beta)}$ نزدیک می‌شود، که با افزایش λ به‌سرعت تحلیل می‌رود. از آنجایی‌که β ممکن است به اندازه دلخواه کوچک فرض شود، اکنون حد (۹) را $\beta\to 0^+$ درنظر می‌گیریم؛ اثبات اینکه با توجه به این شرط، ضرایب فرد $a_{2i+1}(i=0,1,2,...)$ صفر می شوند، دشوار نیست؛ از طرفی حد ضرایب زوج به‌صورت [۳۰]:

$$\lim_{\beta\to 0^+}a_{2i}(\beta)=\frac{c_{2i}}{(k_0^{\alpha})^{2i+1}} \qquad with \quad c_i=\frac{(i+1)!!}{(i^2-1)i!!'} \qquad (۱۰)$$

بیان می‌شود؛ در نتیجه، رابطه (۹) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$S_c(\zeta)=\frac{2}{(k_0\alpha)^2}\frac{\partial^2 S_d}{\partial\zeta^2}-2j\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_{2i}}{(k_{0\alpha})^{2i+1}}\frac{\partial^{2i+1}S_d}{\partial\zeta^{2i+1}} \qquad (۱۱)$$

که در آن مشتقات ζ برای S_d بوده و مشتقات $H_0^{(2)}$ است، باید صریح باشد؛ پس از اجازه دادن به $r=\sqrt{y^2+\zeta^2}$، از خصوصیات دیفرانسیل توابع بسل چنین نتیجه می‌رود که [۲۶ و ۹]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial\zeta}&=-\frac{k_0\zeta}{r}H_1^{(2)}\\
\frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial\zeta^2}&=-k_0\left[1+\zeta^2\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\right]\frac{H_1^{(2)}}{r}\\
\frac{\partial^3 H_0^{(2)}}{\partial\zeta^3}&=-k_0\left[3\zeta\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)+\zeta^3(\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2\right]\frac{H_1^{(2)}}{r}\\
&\vdots
\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

جایی‌که آرگومان توابع هانکل، یعنی k_0r، به‌دلیل سادگی نماد حذف شده است و با رابطه ۱۳ نشان داده می‌شود.

$$d_{lm}=(-1)^m\binom{1}{1-2m}(2m-1)!!=\frac{(-1)^m l!}{(1-2m)!(2m)!!'} \qquad (۱۳)$$

لازم به‌ذکر است که تعداد عبارت‌های سمت راست رابطه (۱۲) برای l زوج ($(l/2+1)$) و برای l فرد $[(l-1)/2+1]$ است؛ از

این‌رو، معادله برابر است با مقداری واحد به اضافه قسمت صحیح $(l/2)$ که با $[l/2]$ نشان داده می‌شود؛ پس از آن داریم [۳۰]:

$$(\frac{1}{r}\frac{d}{dr})^{v}\frac{H_1^{(2)}}{r}=(-k_0)^{v}\frac{H_{v+a}^{(2)}}{r^{v+1}} \qquad (۱۴)$$

که (۱۲) منجر به بیان رابطه زیر می‌شود:

$$\frac{\partial^l\phi_0}{\partial\zeta^l}=(-k_0)^l\sum_{m=0}^{[l/2]}d_{lm}\frac{\phi_{l-m}}{(k_0\zeta)^{m'}} \qquad (۱۵)$$

همچنین داریم:

$$\varphi_n=\left(\frac{\zeta}{r}\right)^n H_n^{(2)}(k_0r) \qquad (۱۶)$$

در نهایت، با جایگزینی روابط (۲) و (۱۵) در (۱۱) رابطه زیر ایجاد می‌شود:

$$S_c(\zeta)=j\pi\phi_{2i+1,1} \qquad (۱۷)$$

با آن داریم [۳۰]:

$$\phi_{in}=\frac{\phi_n}{\alpha^2k_0\zeta}-\frac{\phi_{n+1}}{\alpha^2}-j\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_{2i}}{\alpha^{2i+1}}\sum_{m=0}^{[l/2]}d_{lm}\frac{\phi_{2i-m+n}}{(k_0\zeta)^m} \qquad (۱۸)$$

و از این‌رو، مولفه کل میدان الکتریکی محوری E_x رابطه (۱) ممکن است به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$E_x=-\frac{\omega\mu_0 I}{4}\left[\phi_0\,|_{\zeta=|z-h|}-(\phi_0+2\phi_{2i+1,1})_{\zeta=z+h}\right] \qquad (۱۹)$$

مولفه‌های میدان مغناطیسی غیر پوچ را می‌توان با استفاده از قانون فارادی از E_x به‌دست آورد [۳۰ و ۲۶].

$$H_y=-\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}=\frac{I}{2\pi}\left\{\frac{\partial S_d(\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=z-h}-\left[\frac{\partial S_d(\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial S_c(\zeta)}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=z+h}\right\} \qquad (۲۰)$$

$$H_z=\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{I}{2\pi}\left\{\frac{\partial S_d(\zeta)}{\partial y}\Big|_{\zeta=z-h}-\left[\frac{\partial S_d(\zeta)}{\partial y}-\frac{\partial S_c(\zeta)}{\partial y}\right]_{\zeta=z+h}\right\} \qquad (۲۱)$$

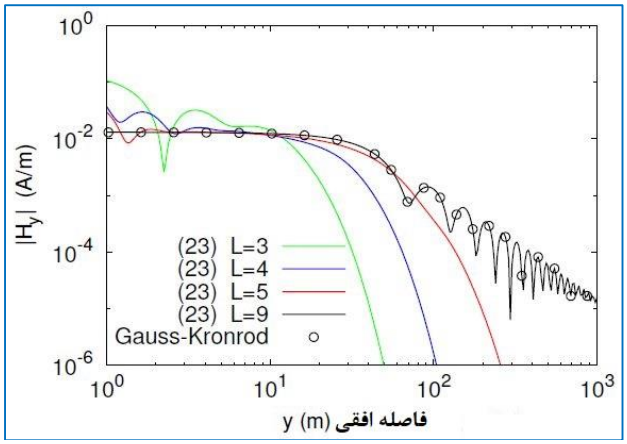
۳ – نتایج

• به‌عنوان اعتبار توسعه نظری، عبارات (۲۱) و (۲۰) برای محاسبه مولفه‌های میدان مغناطیسی که یک منبع خط بی‌نهایت حامل جریان ۱ آمپر در صفحه ۱ متر بالاتر از سطح مشترک بین هوا و خاک رسی تولید می‌شود، استفاده شدند؛ منبع در ۴ مایل بالاتر از محیط مادی قرار داشت که رسانایی الکتریکی و گذردهی دی-الکتریک آن به‌ترتیب برابر با $\sigma_1=0.1mS/m$ و $\varepsilon_1=40\varepsilon_0$ در نظر گرفته شد [۲۷ و ۳۰]؛ در ابتدا، فیلدها بر اساس فاصله افقی y از محور خط، با فرض اینکه فرکانس کاری برابر با ۱ مگاهرتز است، محاسبه شدند؛ چهار پروفایل y تولید شد که هر کدام مربوط به مقدار متفاوتی برای شاخص برش L مجموع بی‌نهایت بیرونی در (۱۸) است. نتایج محاسبات، که در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند، با نتایج حاصل از ارزیابی عددی نمایش‌های انتگرالی برای اجزای میدان مغناطیسی، مقایسه شدند.

$$H_y=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[e^{-u_0|z-h|}-\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{-u_0(z+h)}\right]\cos(\lambda y)d\lambda \qquad (۲۲)$$

$$H_z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda}{u_0}\left[e^{-u_0|z-h|}-\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{-u_0(z+h)}\right]\sin(\lambda y)d\lambda \qquad (۲۳)$$

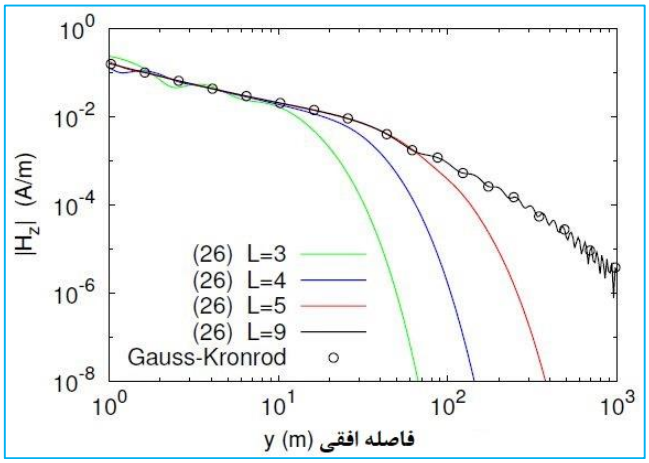
ادغام عددی با استفاده از یک طرح Gauss Kronrod G7-K۱۵ انجام شد که از ترکیب یک قانون گاوس هفت نقطه‌ای با یک قانون Kronrod 15 نقطه‌ای نشات می‌گیرد؛ از تجزیه و تحلیل منحنی-های رسم شده مشخص شد که افزایش شاخص برش L باعث بهبود دقت نتیجه محاسبه می‌شود؛ در واقع، اگر L منحنی‌های ارائه شده توسط (۲۳) و (۲۶) را رشد دهد، به نتایج حاصل از ربع عددی نزدیک شود و توافق نزدیک زمانی حاصل می‌شود که L = 9 در هر دو موقعیت[۱۸ و ۳۰] باشد؛ بنابراین، راه‌حل سری پیشنهادی به راه‌حل دقیق همگرا شد؛ این با منحنی‌های رسم شده در شکل ۴ تایید شد که خطای نسبی نتایج (۲۳) را در مقایسه با داده‌های ادغام عددی نشان می‌دهد؛ همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش L خطا به‌صورت یکنواخت کاهش یافت؛ از سوی دیگر، برای مقدار ثابت L، تا زمانی‌که فاصله y کوچکتر از ۵۰ متر باشد، خطا به‌طور قابل‌توجهی تحت‌تاثیر تغییر فاصله y قرار نگرفت؛ پس از آن، خطای نسبی رشد کرد و رفتار نوسانی از خود نشان داد که برای تمام مقادیر در نظر گرفته شده، شاخص برش مجموع بیرونی در رابطه (۱۸) بسیار مشابه بود؛ با این حال، حتی با افزایش سریع با افزایش فاصله y، برای L = 9 خطا در بازه در نظر گرفته شده از 10^{-3} تجاوز نمی‌کند [۲۳، ۲۶ و ۳۰].



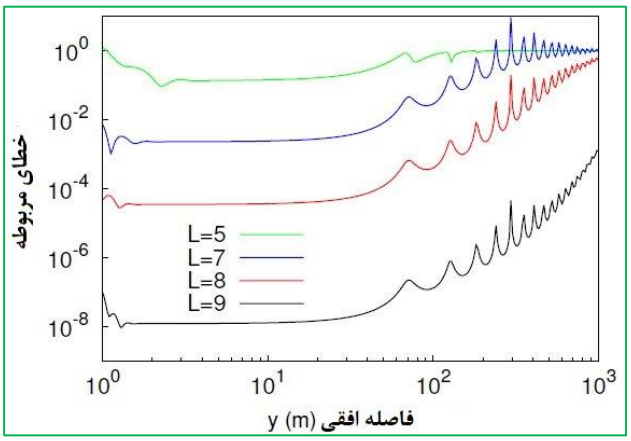
شکل ۲- دامنه H_y در برابر فاصله افقی از منبع خط [۳۰]

دقت نتیجه محاسبات نیز به مقادیر پارامترهای الکترومغناطیسی زمین با تلفات بستگی دارد و به‌عنوان مثال، دقت بهتری برای مقادیر بزرگتر هدایت الکتریکی σ_1 مشاهده شد؛ این جنبه توسط شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است که به‌ترتیب نمایه‌ها را نشان می‌دهند [۲۳ و ۳۰]؛ این جنبه توسط شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است که به‌ترتیب نمایه‌های $|H_y|$ در مقابل نسبت $\sigma_1/(\omega\varepsilon_1)$ و خطای نسبی ناشی از استفاده از رابطه (۲۳) به‌جای طرح G7-K15 را نشان می‌دهد؛ در اینجا، فرض می‌شود که منبع ۱ آمپر را حمل می‌کند و در ۱۰۰ کیلوهرتز کار می‌کند و $\varepsilon_1 = 20\varepsilon_0, h = 5m, y = 10m, z = 1m$. همان‌طور که مشاهده می‌شود، دنباله پروفیل‌های $|H_y|$ تولید شده توسط مجموع جزئی در رابطه (۲۳) به منحنی ارائه شده توسط طرح G7-K15 همگرا شد و تطابق کامل بین داده‌های تحلیلی و عددی دوباره برای L = ۹ به‌دست آمد؛ همگرایی در حد رسانای خوب ($\sigma_1 >> \omega\varepsilon_1$) سریع‌تر بود، جایی‌که برای تولید نتایج به اندازه کافی دقیق، استفاده از مجموع هفت عبارت کافی بود؛ این لزوما به این معنی نیست که خطای نسبی ایجاد شده توسط هر مجموع جزئی در (۲۲) همیشه با افزایش رسانایی کاهش می‌یابد؛ در واقع، همان‌طور که در شکل ۶ اشاره شده است، خطا به‌جای کاهش یکنواخت حول یک مقدار میانگین کاهشی در نوسان است.

روش پیشنهادی امکان دست‌یابی به صرفه‌جویی در زمان را در مقایسه با طرح عددی G7-K15 فراهم کرد، در حالی‌که دقت مورد دوم را حفظ کرد؛ در واقع، در یک پردازنده تک هسته‌ای ۲,۲ گیگاهرتز، میانگین زمان پردازنده برای تولید نمایه $[H_y]$ مرتبط با L = 9 در شکل ۵ برابر با ۱۵۷ میلی‌ثانیه بود، در حالی‌که حدود ۹ ثانیه توسط ادغام عددی گرفته شد؛ از رابطه (۲۳) نیز برای ایجاد همان نتیجه می‌توان بهره برد [۲۳ و ۳۰].



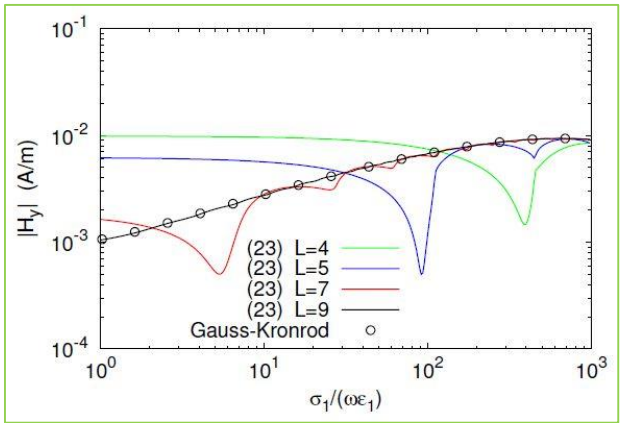
شکل ۳- دامنه H_z در برابر فاصله افقی از منبع خط [۳۰]



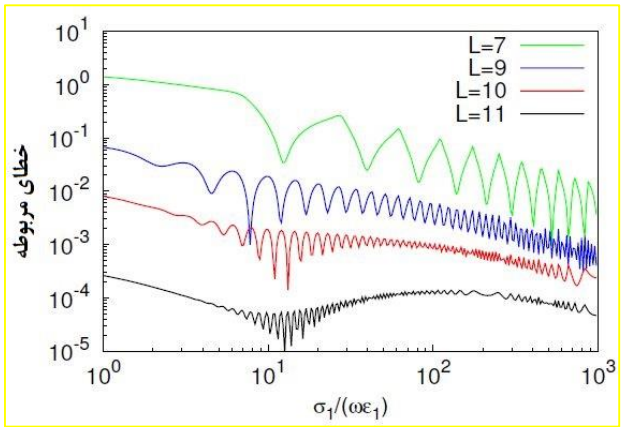
شکل ۴- خطای نسبی رابطه (۲۳) در مقایسه با طرح G7-K۱۵، رسم شده در مقابل y [۳۰]

جدول ۱- مقایسه زمان CPU برای محاسبه H_y

رویکرد	میانگین زمان CPU (ثانیه)	سرعت دادن
G7-K15	8.97	-
با مقدار L=4	3.13×10^{-4}	2.87×10^{4}
با مقدار L=5	1.26×10^{-3}	7.12×10^{3}
با مقدار L=7	3.84×10^{-2}	2.34×10^{2}
با مقدار L=9	1.57×10^{-1}	57.1

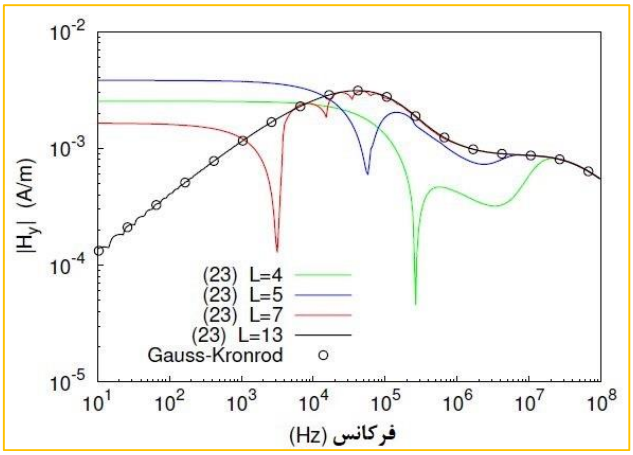


شکل ۵- دامنه H_y در برابر رسانایی نرمال شده زمین $\sigma_1/\omega\varepsilon_1$ [۳۰]



شکل ۶- خطای نسبی رابطه (۲۳) در مقایسه با طرح G7-K15 در مقابل $\sigma_1/\omega\varepsilon_1$ رسم شد [۳۰]

در نهایت، می‌توان پرسید که آیا راه‌حل پیشنهادی هنوز می‌تواند زمانی‌که h و z به صفر نزدیک می‌شوند، استفاده شود؛ زیرا از عبارت (۹) شروع شده است، که انتگرال‌های آن در سمت راست، به بیان دقیق، فقط برای $\zeta = z + h > 0$ همگرا هستند؛ این نقطه با شکل ۷ روشن شده است، که طیف دامنه- فرکانس میدان H_y را نشان می‌دهد که یک منبع خط واحد جریان در نقطه‌ای در فاصله ۳۰ متری از آن ایجاد می‌کند، با این فرض که هم منبع و هم نقطه مشاهده روی زمینی همگن با $\sigma_1 = 20\,mS/m$ و $\varepsilon_1 = 10\varepsilon_0$ قرار داشت؛ همان‌طور که از تجزیه و تحلیل منحنی‌های رسم شده مشخص است، روندهای ناشی از دنباله مجموع جزئی در رابطه (۲۳) همچنان به منحنی حاصل از ادغام عددی رابطه (۲۲) همگرا می‌شوند؛ حتی اگر تعداد عبارت‌های (۲۳) مورد نیاز برای با کاهش فرکانس، داده‌های عددی رشد کرده باشند [۹، ۲۳ و ۳۰].



شکل ۷- طیف دامنه فرکانس H_y، ناشی از استفاده از هر دو رابطه (۲۳) و (۲۲) و طرح G7-K15 [۳۰]

از این‌رو، نرخ همگرایی به فرکانس بستگی دارد و همگرایی در فرکانس‌های بالاتر سریع‌تر بود؛ این جنبه بیشتر در شکل ۸ بررسی شده است، که خطای نسبی نتایج با استفاده از رابطه (۲۳) ترسیم شده در شکل ۷ را در مقایسه با داده‌های ناشی از قانون G7-K15 نشان می‌دهد. منحنی‌های شکل ۸ نشان می‌دهد که برای یک L ثابت، دقت نتیجه محاسبات به‌طور قابل‌توجهی هنگام ورود به محدوده فرکانس پایین بدتر می‌شود؛ در همان زمان، آن‌ها تایید کردند که دقت همیشه می‌تواند با افزایش L افزایش یابد [۲۹].

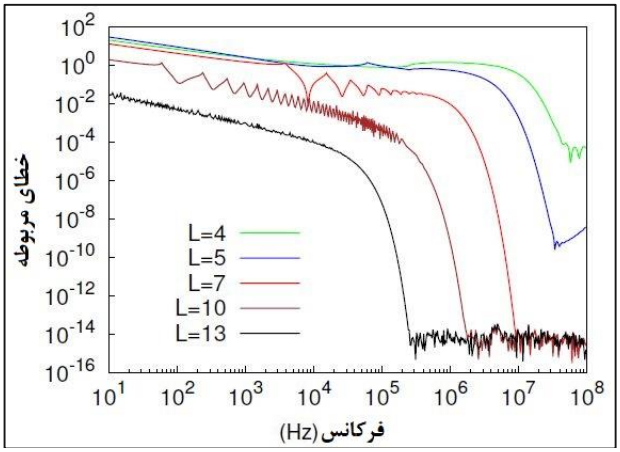
$$\lim_{L\to\infty} \frac{|H_y^{(L+1)} - H_y|}{|H_y^{(L)} - H_y|^p} = q \qquad (۲۴)$$

که در آن نماد $\{H_y^{(L)}\}$ نشان‌دهنده دنباله مجموع جزئی است که از رابطه (۲۳) منشأ می‌گیرد، در نتیجه کوتاه کردن مجموع نامتناهی در رابطه (۱۸)، و جایی‌که p و q مرتبه همگرایی[۳] دنباله هستند و ثابت خطای مجانبی[۴] به‌ترتیب؛ به‌راحتی قابل درک است که پارامترهای p و q به فرکانس عملیاتی بستگی دارند و دانش مقادیر آن‌ها اجازه می‌دهد تا اطلاعات بیشتری در مورد میزان همگرایی به‌دست آوریم؛ به‌عنوان مثال، جدول ۲ تخمین مرتبه Lth و AEC را برای دنباله $\{H_y^{(L)}\}$ مربوط به ۱ کیلوهرتز در شکل ۷ نشان می‌دهد؛ برآوردها با استفاده از عبارات شناخته شده محاسبه شدند [۳۰]:

$$p_L = \frac{\log\left[|H_y^{(L+1)} - H_y^{(L)}| / |H_y^{(L)} - H_y^{(L-1)}|\right]}{\log\left[|H_y^{(L)} - H_y^{(L-1)}| / |H_y^{(L-1)} - H_y^{(L-2)}|\right]} \qquad (۲۵)$$

$$q_L = \frac{|H_y^{(L+1)} - H_y^{(L)}|}{|H_y^{(L)} - H_y^{(L-1)}|^{p_L}} \qquad (۲۶)$$

که حدود $L \to \infty$ به p و q نزدیک می‌شود [۲۹]؛ همان‌طور که در جدول ۲ اشاره شده است $p_L \to 1$ ، با افزایش L، و این بدان معنی است که دنباله $\{H_y^{(L)}\}$ به‌صورت خطی همگرا می‌شود؛ علاوه بر این، همگرایی توسط مقادیر کوچک q_Lها تسریع می‌یابد، که در هر تکرار اضافی دنباله، باقی‌مانده $|H_y - H_y^{(L)}|$ را بیشتر کاهش می‌دهد.



۸- خطای نسبی رابطه (۲۳) در مقایسه با طرح G7-K15 که در برابر فرکانس رسم شده است [۳۰]

جدول ۲- تخمین OC و AEC برای دنباله $\{H_y^{(L)}\}$ [۳۰]

L	p_L	q_L
۴	۰,۸۵۷	۰,۶۷۴
۵	۰,۸۷۱	۰,۵۹۱
۷	۰,۹۴۴	۰,۵۶۳
۱۰	۰,۹۸۹	۰,۴۹۵
۱۳	۰,۹۹۶	۰,۴۴۲

۵- نتیجه‌گیری

این مقاله، یک رویکرد تحلیلی دقیق برای ارزیابی مولفه‌های میدان EM هماهنگ با زمان تولید شده در فضای هوا توسط یک منبع خط جریان بی‌نهایت واقع در بالای یک زمین با تلفات همگن ارائه کرده است؛ این رویکرد شامل گسترش بخش غیر تحلیلی انتگرال عبارت تصحیح در بیان انتگرالی میدان الکتریکی محوری به یک سری توان از ضریب انتشار جهت‌دار z در هوا است؛ این قضیه منجر به بیان میدان الکتریکی محوری به‌عنوان مجموع مشتقات انتگرال سامرفلد می‌شود که میدان مستقیم را توصیف می‌کند، که ممکن است به‌صورت تحلیلی ارزیابی شود؛ در نتیجه، میدان الکتریکی به-عنوان مجموع توابع هانکل استوانه‌ای، با ضرایب بسته به موقعیت نقطه میدان نسبت به منبع خط و تصویر ایده‌آل آن، داده می‌شود؛ سپس، عبارات صریح برای اجزای میدان مغناطیسی نیز با اعمال قانون فارادی به‌دست می‌آیند؛ راه‌حل به‌دست‌آمده مشمول فرضیات ساده‌سازی نمی‌شود و از این‌رو حتی زمانی که اثرات فرکانس بالا ناشی از جریان‌های جابجایی در هوا و خاک دیگر قابل چشم‌پوشی نباشد، معتبر است؛ شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده‌اند تا نشان دهند که رویکرد پیشنهادی، دقت خوبی از خود نشان می‌دهد، در حالی‌که زمان محاسبات قابل‌توجهی کمتری نسبت به طرح‌های مرسوم عددی مورد استفاده برای ارزیابی انتگرال‌های نوع Sommerfeld دارد.

۶ - مراجع

1- Alanen, E.; Lindell, I. Image calculation of electromagnetic field from power lines above a dissipative ground. Arch. Elektrotech. 1985, 68, 259–265.

2- Rachidi, F.; Tkachenko, S. Electromagnetic Field Interaction with Transmission Lines: From Classical Theory to HF Radiation Effects; WIT Press: Southampton, UK, 2008; Volume 5.

3- Spiegel, R.J. Numerical determination of induced currents in humans and baboons exposed to 60-Hz electric fields. IEEE Trans. Electromagn. Compat. 1981, EMC-23, 382–390.

4- Wait, J.R. Theory of wave propagation along a thin wire parallel to an interface. Radio Sci. 1972, 7, 675–679.

5- Wait, J.R.; Spies, K.P. On the image representation of the quasi-static fields of a line current source above the ground. Can. J. Phys. 1969, 47, 2731–2733.

6- Olsen, R.G.; Young, J.L.; Chang, D.C. Electromagnetic wave propagation on a thin wire above earth. IEEE Trans. Antennas Propag. 2000, 48, 1413–1419.

7- Rachidi, F. A review of field-to-transmission line coupling models with special emphasis to lightning-induced voltages on overhead lines. IEEE Trans. Electromagn. Compat. 2012, 54, 898–911.

8- Ametani, A.; Miyamoto, Y.; Baba, Y.; Nagaoka, N. Wave propagation on an overhead multiconductor in a high-frequency region. IEEE Trans. Electromagn. Compat. 2014, 56, 1638–1648.

9- Micu, D.D.; Czumbil, L.; Christoforidis, G.C.; Papadopoulos, T. Semi-infinite integral implementation in the development steps of Interfstud electromagnetic interference software. In Proceedings of the IEEE 2012 47th International Universities Power Engineering Conference (UPEC), London, UK, 4–7 September 2012; pp. 1–6.

10- Papakanellos, P.J.; Kaklamani, D.I.; Capsalis, C.N. Analysis of an infinite current source above a semi-infinite lossy ground using fictitious current auxiliary sources in conjunction with complex image theory techniques. IEEE Trans. Antennas Propag. 2001, 49, 1491–1503.

11- Wise, W.H. Propagation of HF currents in ground return circuits. Proc. Inst. Elect. Eng. 1934, 22, 522–527.

12- Kikuchi, H. Wave propagation along an

22- Olsen, R.G.; Kuester, E.F.; Chang, D.C. Modal theory of long horizontal wire structures above the earth—Part II: Properties of discrete modes. Radio Sci. 1978, 13, 615–623.

23- Déri, Á.; Tevan, G. Mathematical verification of Dubanton's simplified calculation of overhead transmission line parameters and its physical interpretation. Arch. Elektrotech. 1981, 63, 191–198.

24- Tevan, G.; Deri, A. Some remarks about the accurate evaluation of the Carson integral for mutual impedances of lines with earth return. Arch. Elektrotech. 1984, 67, 83–90.

25- Mohsen, A.; Shafai, L. On the image representation of the fields of a line current source above finitely conducting earth. Can. J. Phys. 1981, 59, 117–121.

26- Abramowitz, M.; Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables; Courier Corporation: Massachusetts, MA, USA, 1964; Volume 55.

27- Palacky, G.J. Resistivity characteristics of geologic targets. In Electromagnetic Methods in Applied Geophysics; Nabighian, M.N., Ed.; Society of Exploration Geophysicists: Tulsa, OK, USA, 1988; Chapter 3, Volume 1, pp. 52–129.

28- Ward, S.H.; Hohmann, G.W. Electromagnetic theory for geophysical applications. In Electromagnetic Methods in Applied Geophysics; Nabighian, M.N., Ed.; Society of Exploration Geophysicists: Tulsa, OK, USA, 1988; Chapter 4, Volume 1, pp. 130–311.

29- Householder, A.S. The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1970.

30- Mauro, Parise (2020), "On the Electromagnetic Field of an Overhead Line Current Source", Electronics 2020, 9, 2009; doi:10.3390/electronics9122009.

[1]CEM
[2]EM
[3]OC
[4]AEC

infinite wire above ground at high frequencies. Proc. Electrotech. J. 1956, 2, 73–78.

13- Dorin, C.; Marilena, U.; Codruta, R. Electromagnetic coupling phenomena of overhead power lines in low and high frequency. In Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, EMC'03, Istanbul, Turkey, 11–16 May 2003; Volume 2, pp. 1178–1181.

14- Degauque, P.; Laly, P.; Degardin, V.; Lienard, M. Power line communication and compromising radiated emission. In Proceedings of the IEEE SoftCOM 2010, 18th International Conference on Software, Telecommunications and Computer Networks, Split, Croatia, 23–25 September 2010; pp. 88–91.

15- Pagani, P.; Ney, M.; Zeddam, A. Application of Time Reversal to Power Line Communications for the Mitigation of Electromagnetic Radiation. In Electromagnetic Time Reversal: Application to EMC and Power Systems; Rachidi, F., Rubinstein, M., Paolone, M., Eds.; Wiley Online Library: New York, NY, USA, 2017; Chapter 5, pp. 169–187.

16- Sunde, E.D. Earth Conduction Effects in Transmission Systems; Dover: New York, NY, USA, 1968.

17- Pistol'kors, A. On the theory of a wire parallel to the plane interface between two media. Radiotek 1953, 8, 8–18.

18- Kuester, E.F.; Chang, D.C.; Olsen, R.G. Modal theory of long horizontal wire structures above the earth—Part I: Excitation. Radio Sci. 1978, 13, 605–613.

19- Judkins, R.; Nordell, D. Discussion of Electromagnetic Effects of Overhead Transmission Lines Practical Problems, Safeguards and Methods of Calculation. IEEE Trans. Power Apparatus Syst. 1974, PAS-93, 892–902.

20- Kostenko, M. Mutual impedance of earth-return overhead lines taking into account the skin-effect. Elektritchestvo 1955, 10, 29–34.

21- Chang, D.C.; Olsen, R.G. Excitation of an infinite antenna above a dissipative earth. Radio Sci. 1975, 10, 823–831.